BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN THỊ NGÂN

CHÉO HÓA ĐỒNG THỜI CÁC MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG TRONG MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU

Chuyên ngành: Đại số và Lí thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Bình Định - 2024

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Quy Nhơn

Tập thể hướng dẫn:

TS. Lê Thanh Hiếu

GS. Ruey-Lin Sheu

Phản biện 1: PGS. TS. Vũ Thế Khôi

Phản biện 2: PGS. TS. Mai Hoàng Biên

Phản biện 3: PGS. TS. Phan Thanh Nam

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án họp tại Trường Đại học Quy Nhơn vào hồi ....

Có thể tìm hiểu luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Quy Nhơn

Mục lục

Mở đầu

Cho $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ là một họ các ma trận vuông cấp n với các phần tử trong trường $\mathbb{F}$, với $\mathbb{F}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức $\mathbb{C}$. Nếu tồn tại ma trận không suy biến R sao cho R^*C_iR là các ma trận chéo, thì họ $\mathcal{C}$ được gọi là *chéo hóa tương đẳng đồng thời được*, trong đó R^* là chuyển vị liên hợp của R nếu C_i là các ma trận Hermite và đơn giản là chuyển vị của R nếu C_i hoặc là ma trận đối xứng phức hoặc là ma trận đối xứng thực. Hơn nữa, nếu tồn tại một ma trận không suy biến S sao cho $S^{-1}C_iS$ là ma trận chéo, với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ thì họ $\mathcal{C}$ được gọi là *chéo hóa đồng dạng đồng thời được*, viết tắt là SDS. Để thuận tiện, trong suốt luận án này chúng tôi sử dụng "SDC" là viết tắt của "simultaneously diagonalizable via congruence" hoặc là "simultaneous diagonalization via congruence" nếu không có sự nhầm lẫn nào phát sinh. Bài toán SDS đã được giải trọn vẹn nhưng bài toán SDC vẫn là một bài toán mở trong một số trường hợp. Bài toán SDC cho $\mathcal{C}$ có nghĩa là, bằng một phép biến đổi cơ sở $x = Ry$, các dạng toàn phương x^*C_ix đồng thời có dạng chính tắc. Cụ thể, nếu $R^*C_iR = \mathtt{diag}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo là $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$, thì x^*C_ix được biến đổi thành tổng các bình phương $y^*(R^*C_iR)y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}|y_j|^2$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$. Đây là một trong những tính chất kết nối tính SDC của họ ma trận với nhiều ứng dụng, chẳng hạn như, trong giải tích biến phân [31], xử lý tín hiệu [14],[52],[62], cơ lượng tử [57], phân tích hình ảnh y tế [2],[13],[67] và nhiều ứng dụng khác. Đặc biệt, bài toán SDC đề xuất một cách tiếp cận đầy hứa hẹn cho việc giải các bài toán qui hoạch toàn phương với các ràng buộc toàn phương (QCQP) [5],[17],[74]. Trong các nghiên cứu gần đây của Ben-Tal and Hertog [6], Jiang and Li [37], Alizadeh [4], Taati [54], Adachi and Nakatsukasa [1], tính SDC của hai hoặc ba ma trận đối xứng thực được ứng dụng hiệu quả trong giải bài toán quy hoạch toàn phương với một hoặc hai ràng buộc toàn phương. Ben-Tal and Hertog [6] đã chỉ ra rằng nếu các ma trận của hàm mục tiêu và hàm ràng buộc là SDC thì bài toán QCQP với một ràng buộc toàn phương có thể được viết lại như bài toán nón bậc hai lồi (SOCP); bài toán QCQP với hai ràng buộc toàn phương cũng có thể biến đổi tương đương về bài toán SOCP với việc bổ sung các giả định phù hợp. Ta biết rằng bài toán SOCP lồi có thể được giải hiệu quả bởi các thuật toán có độ phức tạp đa thức [4]. Jiang và Li [37] ứng dụng tính SDC để giải một số lớp bài toán QCQP, cụ thể là bài toán miền tin cậy suy rộng (GTRS), tức là bài toán QCQP với một ràng buộc toàn phương và các biến thể của nó. Dạng thuần nhất của QCQP được đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính nếu các ma trận là SDC. Salahi and Taati [54] đã đưa ra một thuật toán hiệu quả để giải GTRS thông qua điều kiện SDC. Cũng với điều kiện SDC, Adachi and Nakatsukasa [1] đã tính khoảng xác định dương $I_{\succ}(C_0, C_1) = \{\mu \in \mathbb{R} : C_0 + \mu C_1 \succ 0\}$ của ma trận chùm $C_0 + \mu C_1$ và đưa ra một giải thuật dựa trên giá trị riêng cho bài toán GTRS khả thi và xác định, tức là, bài toán GTRS thỏa mãn điều kiện Slater và $I_{\succ}(C_0, C_1) \neq \emptyset$.

Những ứng dụng quan trọng đó là động lực để tiến hành nghiên cứu *"bài toán SDC":* Tìm điều kiện của $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ để đảm bảo sự tồn tại của một ma trận R làm chéo hóa đồng thời các ma trận này, bao gồm bài toán SDC của các ma trận đối xứng thực [27], [37], [41], [65], [70], bài toán SDC của các ma trận đối xứng phức [11], [34] và bài toán SDC của các ma trận Hermite [7], [34], [74]. Tuy nhiên, đối với ma trận thực, kết quả SDC tốt nhất cho đến nay chỉ có thể giải quyết được cho hai ma trận, trong khi trường hợp nhiều hơn hai ma trận chỉ giải quyết được dưới điều kiện tồn tại tổ hợp tuyến tính nửa xác định dương của ma trận chùm [37]. Bài toán SDC các ma trận phức, bao gồm các ma trận đối xứng phức và các ma trận Hermite, có thể biến đổi tương đương với bài toán chéo hóa đồng dạng đồng thời các ma trận (SDS) [7], [8], [11], [74]. Tuy nhiên, các kết quả đạt được không bao gồm giải thuật tìm ma trận R, ngoại trừ trường hợp hai ma trận đối xứng thực được giải bởi Jiang and Li [37]. Những vấn đề chưa được giải quyết nói trên sẽ được chúng tôi nghiên cứu trong luận án này, đặc biệt là việc tìm giải thuật để tìm ma trận R nếu nó tồn tại.

Có thể xem bài toán SDC lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Weierstrass [70] vào 1868. Ông ấy đã đưa ra điều kiện đủ cho tính SDC của một cặp ma trận đối xứng thực. Từ đó, một số tác giả đã mở rộng kết quả này như Muth 1905 [45], Finsler 1937 [18], Albert 1938 [3], Hestenes 1940 [28], và một số công trình khác, chẳng hạn, [12],[27], [29], [30], [34], [44], [65]. Các kết quả đạt được của hai ma trận có thể tóm lược như sau. Hai ma trận C_1, C_2, với C_1 không suy biến là SDC khi và chỉ khi $C_1^{-1}C_2$ chéo hóa đồng dạng được [27], [64], [65]. Nếu cả hai ma trận đều suy biến thì các kết quả đạt được chỉ là điều kiện đủ. Cụ thể:

a) Nếu tồn tại $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 \succ 0$, thì C_1, C_2 là SDC [30], [65];

b) Nếu $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T C_1 x = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x^T C_2 x = 0\} = \{0\}$ thì C_1, C_2 là SDC [44],[59],[65].

Định lý Finsler [18] (năm 1937) đã chỉ ra rằng điều kiện a) và b) tương đương khi $n \geqslant 3$. Phải đợi đến năm 1970, Hoi [74] và 1980, Becker [5] làm việc độc lập đã đạt được điều kiện cần và đủ cho một cặp ma trận Hermite là SDC. Tuy nhiên, kết quả trên không còn đúng khi có nhiều hơn hai ma trận. Vào năm 1990 và 1991, Binding [7], [8] đưa ra các điều kiện tương đương để một họ hữu hạn các ma trận Hermitian là SDC. Các điều kiện này có liên quan đến bài toán giá trị riêng suy rộng và miền giá trị của các ma trận Hermitian đã cho. Tuy nhiên, tác giả vẫn chưa đưa ra được giải thuật để tìm ma trận tương đẳng R. Vào năm 2002, Hiriart-Urruty và M. Torki [29] và sau đó, vào năm 2007, Hiriart-Urruty [30] đưa ra bài toán SDC như một bài toán mở: *Tìm những điều kiện hợp lý và có thể "cảm nhận được" đối với $C_1, C_2, \dots, C_m$ để chúng chéo hóa tương đẳng đồng thời được.* Vào năm 2016, Jiang và Li [37] đã đưa ra điều kiện cần và đủ để một cặp ma trận đối xứng thực là SDC và đưa ra giải thuật tìm ma trận R nếu nó tồn tại. Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy rằng kết quả của Jiang và Li [37] vẫn chưa đầy đủ. Một trường hợp còn thiếu chưa được xem xét trong bài báo của họ sẽ được bổ sung trong luận án này. Đối với trường hợp nhiều hơn hai ma trận, Jiang và Li [37] đã đưa ra điều kiện cần và đủ để họ ma trận là SDC dưới điều kiện tồn tại tổ hợp tuyến tính nửa xác định dương của ma trận chùm. Sau kết quả này, một câu hỏi mở vẫn cần câu trả lời: *Giải bài toán SDC của họ nhiều hơn hai ma trận đối xứng thực mà không cần điều kiện tồn tại tổ hợp tuyến tính nửa xác định dương của ma trận chùm?* Vào năm 2020, Bustamante và các cộng sự [11] đã đưa ra điều kiện cần và đủ cho họ các ma trận đối xứng phức SDC bằng cách chuyển bài toán SDC về bài toán chéo hóa đồng dạng đồng thời được (SDS) của họ các ma trận liên quan. Một giải thuật gồm hữu hạn bước xác định họ ma trận đối xứng phức có SDC hay không cũng được đưa ra. Tuy nhiên, kết quả SDC của các ma trận đối xứng phức nói chung không đúng với các ma trận đối xứng thực. Nghĩa là, mặc dù các ma trận $C_1, C_2, \ldots, C_m$ là các ma trận đối xứng thực nhưng các ma trận R và $R^T C_i R$ có thể là phức, xem Ví dụ 16 [11], và Ví dụ 2.1.7. Rõ ràng, tính SDC của các ma trận đối xứng phức cũng không áp dụng được cho các ma trận Hermite, xem Định lý 4.5.15 [34], Ví dụ 2.1.7. Hơn nữa, như đã nói ở trên, bài toán SDC các ma trận đối xứng phức không tương đương với việc đổi cơ sở cho một họ toàn phương phức. Việc đổi cơ sở này là SDC của họ ma trận Hermite qua phép tương đẳng chuyển vị liên hợp.

Cấu trúc của Luận án như sau. Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm liên quan đến bài toán SDC và SDS. Đồng thời chúng tôi tóm lược các kết quả đã đạt được cho đến nay của bài toán SDC, bao gồm bài toán SDC các ma trận đối xứng thực, đối xứng phức và Hermite. Chương 2 trình bày hai phương pháp giải bài toán SDC các ma trận Hermite và một phương pháp giải bài toán SDC các ma trận đối xứng thực.

Các phương pháp giải bài toán SDC các ma trận Hermite dựa trên kết quả của bài báo [42]. Những đóng góp chính của phần này như sau.

- Chúng tôi phát triển các điều kiện cần và đủ (xem Định lý 2.1.4 và 2.1.5) đối với họ hữu hạn các ma trận Hermite để chéo hóa $*$-tương đẳng đồng thời được. Các chứng minh chỉ sử dụng công cụ Tính toán ma trận;

- Một điều thú vị là, một trong các điều kiện tương đương được chỉ ra trong Định lý 2.1.5 yêu cầu sự tồn tại của nghiệm xác định dương của một hệ phương trình tuyến tính trên các ma trận Hermite. Điều này giúp ta có thể sử dụng phép quy hoạch nửa xác định (SDP) (ví dụ, SDPT3 [63]) để kiểm tra tính SDC của một họ các ma trận Hermite. Trong trường hợp các ma trận là SDC, nghĩa là, nghiệm xác định dương nói trên tồn tại, chúng tôi áp dụng phương pháp Jacobi-like [10], [43] để chéo hóa đồng thời các ma trận Hermite giao hoán đôi một là ảnh của các ma trận ban đầu qua phép tương đẳng xác định bởi căn bậc hai của nghiệm xác định dương nêu trên. Tức là, bài toán SDC các ma trận Hermite được giải xong. Một điều thú vị nữa là, kết quả này cũng đúng cho các ma trận đối xứng thực. Đây là bài toán tồn tại lâu dài được đề cập dưới dạng một bài toán mở trong [30]. Hơn nữa, kết quả này cũng được sử dụng để giải bài toán SDC cho họ ma trận vuông bất kì bằng cách phân tích chúng thành tổng của phần Hermite và phần phản Hermite (xem Định lý 2.1.6);

- Một số điều kiện tương đương khác của tính chất SDC đòi hỏi xác định hạng cực đại của một ma trận chùm Hermite (Định lý 2.1.2), chúng tôi đã đề xuất giải thuật tựa- Schmüdgen (Thuật toán 2) để tìm hạng cực đại này. Phương pháp này cũng có thể được áp dụng trong một số bài toán SDC khác, ví dụ, trong [11];

- Cuối cùng chúng tôi đưa ra các thuật toán mà trong đó thuật toán chính là Thuật toán 6 giải bài toán SDC các ma trận Hermite. Mã Matlab tương ứng cho các thuật toán cũng được chúng tôi triển khai. Thuật toán chính gồm hai bước có thể tóm tắt như sau: Cho $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{H}^n$,

BƯỚC 1: Kiểm tra sự tồn tại một ma trận P xác định dương bằng việc giải hệ phương trình tyến tính trong Định lý 2.1.5 iii). Đóng góp chính của chúng tôi là ở phần này.

BƯỚC 2: Nếu tồn tại một ma trận P như thế thì áp dụng Thuật toán 5 [10], [43] để tìm ma trận unita V làm chéo hóa đồng thời các ma trận Hermite giao hoán $\sqrt{P}C_i\sqrt{P}$, $i = 1, \dots, m$.

Phần còn lại của Chương 2 dựa vào kết quả trong [49], đưa ra một thuật toán khác để giải bài toán SDC các ma trận đối xứng thực. Định lý 2.1.5 cũng đúng cho các ma trận đối xứng thực, tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy rằng, kĩ thuật phân tích hai ma trận của Jiang và Li [37] có thể phát triển thành phương pháp xây dựng và quy nạp để giải bài toán SDC họ ma trận đối xứng thực $\mathcal{C}$, với $m \geqslant 3$, và phương pháp này có thể tốt hơn phương pháp áp dụng Định lý 2.1.5 và dùng SDP, xem Ví dụ 2.2.2. Phương pháp này được tóm tắt như sau.

Xét họ ma trận đối xứng thực $\mathcal{C}$ trong hai trường hợp: *họ không suy biến,* kí hiệu bởi $\mathcal{C}_{ns}$, khi ít nhất một trong các ma trận $C_i \in \mathcal{C}$ là không suy biến, trong trường hợp này, không mất tổng quát giả sử rằng C_1 là ma trận không suy biến, và *họ suy biến,* kí hiệu bởi $\mathcal{C}_s$, khi tất cả các ma trận trong $\mathcal{C}$ khác không nhưng suy biến. Đối với họ $\mathcal{C}_{ns}$, đầu tiên lập luận cho hai ma trận $\{C_1, C_2\}$; nếu C_1 và C_2 là SDC thì một ma trận $Q^{(1)}$ được xây dựng ở vòng lặp đầu tiên sao cho $C_2^{(1)} := (Q^{(1)})^T C_2 Q^{(1)}$ là một sự biểu diễn không tuyến tính (non-homogeneous dilation) của $C_1^{(1)} := (Q^{(1)})^T C_1 Q^{(1)}$, trong khi $C_j^{(1)} := (Q^{(1)})^T C_j Q^{(1)}, j \geqslant 3$ có cùng cấu trúc khối với $C_1^{(1)}$, xem Bổ đề 2.2.2 và Nhận xét 2.2.1 ở dưới. Ở vòng lặp thứ hai, $\{C_1^{(1)}, C_3^{(1)}\}$ được kiểm tra; nếu $C_1^{(1)}, C_3^{(1)}$ là SDC thì $Q^{(2)}$ được xây dựng sao cho $C_3^{(2)} := (Q^{(2)})^T C_3^{(1)} Q^{(2)}$ và $C_2^{(2)} := (Q^{(2)})^T C_2^{(1)} Q^{(2)}$ biểu diễn không tuyến tính của $C_1^{(2)} := (Q^{(2)})^T C_1^{(1)} Q^{(2)}$. Tiếp tục,

$\{C_1^{(2)}, C_4^{(2)}\}$ được xét ở bước thứ ba; và cứ tiếp tục như thế. Những kết quả này được trình bày trong mục 2.2.1. Đối với họ $\mathcal{C}_s$, ta bắt đầu với $\{C_1, C_2\}$. Nếu C_1, C_2 là SDC, tìm một ma trận không suy biến U_1 sao cho

$$\hat{C}_1 := U_1^T C_1 U_1 = \mathtt{diag}((C_{11})_{p_1}, 0_{n-p_1}), p_1 < n,$$
$$\hat{C}_2 := U_1^T C_2 U_1 = \mathtt{diag}((C_{21})_{p_1}, 0_{n-p_1})$$

với $(C_{11})_{p_1}, (C_{21})_{p_1}$ là SDC và $(C_{21})_{p_1}$ không suy biến. Ở vòng lặp thứ hai, ta xét tính SDC của $\hat{C}_1, \hat{C}_2$ và $\hat{C}_3 = U_1^T C_3 U_1$. Nếu chúng SDC, tìm một ma trận không suy biến U_2 sao cho

$$\breve{C}_1 := U_2^T \hat{C}_1 U_2 = \mathtt{diag}((C_{11})_{p_2}, 0_{n-p_2}), p_1 \leqslant p_2,$$
$$\breve{C}_2 := U_2^T \hat{C}_2 U_2 = \mathtt{diag}((C_{21})_{p_2}, 0_{n-p_2}),$$
$$\breve{C}_3 := U_2^T \hat{C}_3 U_2 = \mathtt{diag}((C_{31})_{p_2}, 0_{n-p_2})$$

với $(C_{11})_{p_2}, (C_{21})_{p_2}, (C_{31})_{p_2}$ là SDC và $(C_{31})_{p_2}$ không suy biến; và cứ tiếp tục như thế. Bằng cách này, ta chỉ ra rằng nếu $\mathcal{C}_s$ là SDC, một họ mới được tạo ra $\tilde{\mathcal{C}}_s = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_m\}$ sao cho $\tilde{C}_i = \mathtt{diag}((C_{i1})_p, 0_{n-p}), p \leqslant n$, và $(C_{(m-1)1})_p$ không suy biến. Quan trọng hơn, họ đã cho $\mathcal{C}_s$ là SDC nếu và chỉ nếu $(C_{11})_p, \ldots, (C_{m1})_p$ là SDC. Vì vậy, việc nghiên cứu tính SDC của họ suy biến được chuyển về việc nghiên cứu tính SDC của họ không suy biến; xem Định lý 2.2.3.

Chương 3 trình bày một số ứng dụng của kết quả SDC. Đầu tiên, ta khai thác tính SDC của hai ma trận đối xứng thực C_1, C_2 để tính khoảng nửa xác định dương $I_{\succeq}(C_1, C_2) = \{\mu \in \mathbb{R} : C_1 + \mu C_2 \succeq 0\}$ của ma trận chùm $C_1 + \mu C_2$. Nếu C_1, C_2 không SDC, thì $I_{\succeq}(C_1, C_2)$ có nhiều nhất một giá trị μ, còn nếu C_1, C_2 là SDC và $I_{\succeq}(C_1, C_2)$ khác rỗng thì nó có thể một điểm hoặc một khoảng. Mỗi trường hợp giúp ta phân tích bài toán GTRS về dạng không bị chặn dưới, có duy nhất nhân tử Lagrange hoặc có một nhân tử Lagrange tối ưu μ^* trong khoảng đã cho, mà một μ^* như thế sẽ được tìm bằng thuật toán chia đôi. Kết quả này dựa trên kết quả của bài báo

[47]. Ứng dụng tiếp theo là giải bài toán QCQP có dạng

$$
\text{(QCQP)} \qquad \begin{array}{ll} \min & x^T C_1 x + 2a_1^T x \\ \text{s.t.} & x^T C_i x + 2a_i^T x + b_i \leqslant 0, \ i = 2, \ldots, m, \end{array}
$$

với $a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$. Nếu các ma trận C_i trong hàm ràng buộc và hàm mục tiêu là SDC, bài toán QCQP sẽ được nới lỏng về bài toán SOCP lồi. Nhìn chung, sự nới lỏng sẽ làm cho giá trị tối ưu của bài toán nới lỏng SOCP lồi bé hơn giá trị tối ưu của bài toán gốc QCQP. Các trường hợp nới lỏng mà giá trị tối ưu của bài toán nới lỏng SOCP lồi bằng giá trị tối ưu của bài toán gốc QCQP sẽ được trình bày trong chương này. Cụ thể, nếu các ma trận C_i là SDC và QCQP thuần nhất thì QCQP sẽ được đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính sau khi thực hiện hai bước đổi biến. Một trường hợp đặc biệt của QCQP thuần nhất, đó là cực tiểu của hàm mục tiêu toàn phương với hai ràng buộc toàn phương thuần nhất được xét trên mặt cầu đơn vị [46], nếu các ma trận là SDC thì nó suy biến thành bài toán quy hoạch tuyến tính trên một đơn hình. Cuối cùng, chúng tôi chỉ ra một ứng dụng cho việc giải bài toán tỉ số Rayleigh suy rộng.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số khái niệm chuẩn bị cho giải bài toán SDC

Chúng ta bắt đầu bằng một số khái niệm:

- Các ma trận $C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{H}^n$ được gọi là SDC trên $\mathbb{C}$, viết tắt $*$-*SDC,* nếu tồn tại một trận không suy biến $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sao cho mỗi $P^* C_i P$ là chéo trên $\mathbb{R}^{n\times n}$;
- Các ma trận $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{S}^n$ được gọi là SDC trên $\mathbb{R}$, viết tắt $\mathbb{R}$-*SDC,* nếu tồn tại một trận không suy biến $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho mỗi $P^T C_i P$ là ma trận chéo trên $\mathbb{R}^{n\times n}$;
- Các ma trận $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{S}^n(\mathbb{C})$ được gọi là SDC trên $\mathbb{C}$ nếu tồn tại một trận không suy biến $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sao cho mỗi $P^T C_i P$ là ma trận chéo trên $\mathbb{C}^{n\times n}$, viết tắt là $\mathbb{C}$-*SDC.*

1.2 Các kết quả về SDC đã đạt được

Bổ đề 1.2.1. ([27], p.255) *Hai ma trận $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$, với C_1 không suy biến, là $\mathbb{R}$-SDC khi và chỉ khi $C_1^{-1}C_2$ đồng dạng với một ma trận chéo thực.*

Bổ đề 1.2.6([37], Bổ đề 5) *Với hai ma trận $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$, suy biến, luôn tồn tại một ma trận không suy biến U sao cho*

$$\tilde{A} := U^T C_1 U = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p\times(n-p)} \\ 0_{(n-p)\times p} & 0_{n-p} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

và

$$\tilde{B} := U^T C_2 U = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{p\times q} & B_2 \\ 0_{q\times p} & B_3 & 0_{q\times r} \\ B_2^T & 0_{r\times q} & 0_r \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

với $p, q, r \geqslant 0, p+q+r = n$, A_1, B_3 là các ma trận chéo không suy biến.

Bổ đề 1.2.8. *Cho $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$, khác không, suy biến với hạng rank$(C_1) = p < n$. Luôn tồn tại một ma trận không suy biến U_1 sao cho*

$$\tilde{C}_1 = U_1^T C_1 U_1 = \begin{pmatrix} \underbrace{(C_{11})_p}_{\text{khả nghịch và chéo}} & 0 \\ 0 & 0_{n-p} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\tilde{C}_2 = U_1^T C_2 U_1 = \begin{pmatrix} (C_{21})_p & C_{22} \\ C_{22}^T & 0_{n-p} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

hoặc

$$\tilde{C}_2 = U_1^T C_2 U_1 = \begin{pmatrix} (C_{21})_p & 0 & C_{25} \\ 0 & \underbrace{(C_{26})_{s_1}}_{\text{khả nghịch và chéo}} & 0 \\ C_{25}^T & 0 & 0_{n-p-s_1} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

với $s_1 \leqslant n - p$. Nếu $s_1 = n - p$ thì C_{25} không tồn tại.

Bổ đề 1.2.9.([37], Định lý 6) *Hai ma trận suy biến C_1 và C_2, tương ứng có các dạng (1.1) và (1.2), là $\mathbb{R}$-SDC khi và chỉ khi A_1 và B_1 là $\mathbb{R}$-SDC và $B_2 = 0$ hoặc $r = n - p - s_1 = 0$ (B_2 không tồn tại).*

Định lý 1.2.1. *Cho $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ suy biến. Giả sử U_1 là ma trận không suy biến sao cho $\tilde{C}_1 = U_1^T C_1 U_1$ và $\tilde{C}_2 = U_1^T C_2 U_1$ có dạng* (1.3) *và* (1.4) *trong Bổ đề 1.2. Khi đó, $\tilde{C}_1$ và $\tilde{C}_2$ là $\mathbb{R}$-SDC khi và chỉ khi C_{11}, C_{21} là $\mathbb{R}$-SDC và $C_{22} = 0_{p\times r}$, với $r = n - p$.*

Chương 2

Giải bài toán SDC các ma trận Hermite và các ma trận đối xứng thực

2.1 Bài toán SDC các ma trận Hermite

2.1.1 Phương pháp hạng cực đại

Định lý 2.1.1. *Cho $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]^{n\times n}$ là các ma trận Hermite, nghĩa là, $\mathfrak{C}(\lambda)^* = \mathfrak{C}(\lambda)$ với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Khi đó tồn tại các ma trận đa thức $\mathfrak{X}_+, \mathfrak{X}_- \in \mathbb{F}[\lambda]^{n\times n}$ và các đa thức $b, d_j \in \mathbb{R}[\lambda], j = 1, 2, \ldots, n$ (chú ý b, d_j luôn thực thậm chí $\mathbb{F}$ là trường phức) sao cho*

$$\mathfrak{X}_+\mathfrak{X}_- = \mathfrak{X}_-\mathfrak{X}_+ = b^2 I_n \tag{2.1a}$$

$$b^4\mathfrak{C} = \mathfrak{X}_+ \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)\mathfrak{X}_+^*, \tag{2.1b}$$

$$\mathfrak{X}_-\mathfrak{C}\mathfrak{X}_-^* = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n). \tag{2.1c}$$

$$\mathfrak{C}_{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k^* & \hat{\mathfrak{C}}_k \end{pmatrix}, \mathfrak{C}_k = \alpha_k(\alpha_k \hat{\mathfrak{C}}_k - \beta_k^* \beta_k), b = \prod_{t=1}^{k} \alpha_t,$$
$$\mathfrak{X}_{k+} = \mathfrak{X}_{(k-1)+} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_k I & 0 \\ 0 & \mathfrak{Y}_{k+} \end{pmatrix}, \mathfrak{X}_{k-} = \begin{pmatrix} \alpha_k I_{k-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Y}_{k-} \end{pmatrix} . \mathfrak{X}_{(k-1)-},$$
$$\mathfrak{X}_{k-}\mathfrak{C}\mathfrak{X}_{k-}^* = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, d_k) & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_k \end{pmatrix} := \tilde{\mathfrak{C}}_k, \tag{2.2}$$

với $\mathfrak{Y}_{k\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \pm\beta_k^* & \alpha_k I_{n-k} \end{pmatrix}$ và

$$d_k = \alpha_k^3, d_j = \alpha_j^3 \prod_{t=j+1}^{k} \alpha_t^2, j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.3}$$

Định lý 2.1.2. *Sử dụng các khái niệm trong Định lý 2.1.1, và giả sử $\mathfrak{C}_k$ trong (2.2) là chéo nhưng mỗi $\mathfrak{C}_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, không là ma trận chéo. Xét sự cải tiến của (2.2) như sau*

$$\mathfrak{C}_{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k^* & \hat{\mathfrak{C}}_k \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}_k = \alpha_k(\alpha_k \hat{\mathfrak{C}}_k - \beta_k^* \beta_k),$$
$$\mathfrak{X}_{k-} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Y}_{k-} \end{pmatrix} . \mathfrak{X}_{(k-1)-}, \qquad \mathfrak{Y}_{k\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ \pm\beta_k^* & \alpha_k I_{n-k} \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{X}_{k-}\mathfrak{C}\mathfrak{X}_{k-}^* = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \ldots, \alpha_{k-1}^3, \alpha_k^3) & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_k \end{pmatrix} := \tilde{\mathfrak{C}}_k, \tag{2.4}$$

Hơn nữa, đặt $d_i = \alpha_i^3, i = 1, 2, \ldots, k$, và $\mathfrak{C}_k = \operatorname{diag}(d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_n)$, $d_j \in \mathbb{R}[\lambda], j = 1, 2, \ldots, n$, và một vài $d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_n$ có thể bằng không. Điều sau đây đúng.

(i) α_t chia hết α_{t+1} (và do đó d_t chia hết d_{t+1}) với mỗi $t \leqslant k-1$, và nếu $k < n$, thì α_k chia hết mọi $d_j, j > k$.

(ii) Ma trận chùm $\mathfrak{C}(\lambda)$ có hạng cực đại là r khi và chỉ khi tồn tại một hoán vị sao cho $\tilde{\mathfrak{C}}(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, d_j không đồng nhất bằng không với mọi $j = 1, 2, \ldots, r$. Thêm nữa, hạng cực đại của $\mathfrak{C}(\lambda)$ đạt được tại $\hat{\lambda}$ khi và chỉ khi $\alpha_k(\hat{\lambda}) \neq 0$ nếu $\mathfrak{C}_k$ đồng nhất bằng không hoặc $(\prod_{t=k+1}^{r} d_t(\hat{\lambda})) \neq 0$ nếu $\mathfrak{C}_k$ không đồng nhất bằng không.

Định lý 2.1.3. *Các ma trận $I, C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{H}^n, m \geqslant 1$ là $*$-SDC khi và chỉ khi chúng giao hoán. Hơn nữa, khi điều này xảy ra, thì các ma trận là $*$-SDC bởi ma trận unita (tương ứng, ma trận trực giao) nếu $C_1, \ldots, C_m$ là phức (tương ứng, là thực).*

Định lý 2.1.4. *Cho $0 \neq C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{H}^n$ với $\dim_{\mathbb{C}}(\bigcap_{t=1}^{m} kerC_t) = q$, (luôn có $q < n$.)*

1. *Nếu $q = 0$, thì điều sau đây xảy ra:*

   (i) Nếu $det\mathfrak{C}(\lambda) = 0$, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}^m$, thì $C_1, \ldots, C_m$ không $*$-SDC.

   (ii) Ngược lại, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}^m$ sao cho $det\mathfrak{C}(\lambda) \neq 0$. Các ma trận $C_1, \ldots, C_m$ là $*$-SDC khi và chỉ khi $\mathfrak{C}(\lambda)^{-1}C_1, \ldots, \mathfrak{C}(\lambda)^{-1}C_m$ đôi một giao hoán và mỗi $\mathfrak{C}(\lambda)^{-1}C_i, i = 1, 2, \ldots, m$, đồng dạng với một ma trận chéo thực.

2. *Nếu $q > 0$, thì tồn tại ma trận không suy biến V sao cho*

$$V^*C_iV = \boldsymbol{diag}(\hat{C}_i, 0_q), \forall i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.5}$$

   với 0_q là ma trận không cấp q và $\hat{C}_i \in \mathbb{H}^{n-q}$ với $\bigcap_{t=1}^{m} ker\hat{C}_t = 0$. Hơn nữa, $C_1, \ldots, C_m$ là $*$-SDC khi và chỉ khi $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \ldots, \hat{C}_m$ là $*$-SDC.

2.1.2 Phương pháp SDP

Định lý 2.1.5. *Các điều kiện sau đây là tương đương:*

(i) Các ma trận $C_1, C_2, \ldots, C_m \in \mathbb{H}^n$ là $*$-SDC.

(ii) Tồn tại một ma trận không suy biến $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sao cho P^*C_1P, $P^*C_2P, \ldots, P^*C_mP$ giao hoán.

(iii) Hệ phương trình

$$C_iXC_j = C_jXC_i, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{2.6}$$

có một nghiệm $X \in \mathbb{H}^n$ xác định dương.

Hơn nữa: Nếu C_i là các ma trận thực thì các ma trận tương ứng P, X trong các điều kiện trên đều có thể lấy là thực.

Đặt $\mathcal{H}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$; $\mathcal{S}(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$. Ta có $\mathcal{H}(A)$ và $\mathbf{i}\mathcal{S}(A)$ đều là các ma trận Hermite.

Định lý 2.1.6. (xem, chẳng hạn, trong Mục 1.7, Bài toán 18 [35]) *Các ma trận vuông $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{F}^{n\times n}$ là $*$-SDC khi và chỉ khi $\mathcal{H}(A_t), \mathbf{i}\mathcal{S}(A_t)$, $t = 1, \ldots, m$, là $*$-SDC.*

2.2 Phương pháp khác giải bài toán SDC các ma trận đối xứng thực

2.2.1 Bài toán SDC các ma trận đối xứng thực không suy biến

Định lý 2.2.1. *Cho $\mathcal{C}_{ns} = \{C_1, \ldots, C_m\} \subset \mathcal{S}^n$, $m \geqslant 3$, là họ các ma trận không suy biến, với C_1 khả nghịch. Giả sử với mỗi i ma trận $C_1^{-1}C_i$ đồng dạng với một ma trận thực. Nếu $C_jC_1^{-1}C_i$ đối xứng với $2 \leqslant i < j \leqslant m$, thì luôn tồn tại ma trận không suy biến thực R sao cho*

$$R^TC_1R = \mathtt{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s),$$

$$R^T C_2 R = \boldsymbol{diag}(\alpha_1^2 A_1, \alpha_2^2 A_2, \ldots, \alpha_s^2 A_s), \tag{2.7}$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$R^T C_m R = \boldsymbol{diag}(\alpha_1^m A_1, \alpha_2^m A_2, \ldots, \alpha_s^m A_s),$$

với $A_t' s$ không suy biến và đối xứng, $\alpha_t^i, t = 1, \ldots, s$, là các số thực.

Định lý 2.2.2. *Cho $\mathcal{C}_{ns} = \{C_1, \ldots, C_m\} \subset \mathcal{S}^n$, $m \geqslant 3$, là họ các ma trận không suy biến, với C_1 khả nghịch. Họ không suy biến $\mathcal{C}_{ns}$ là $\mathbb{R}$- SDC khi và chỉ khi với mỗi $2 \leqslant i \leqslant m$, ma trận $C_1^{-1} C_i$ đồng dạng với một ma trận thực và $C_j C_1^{-1} C_i, 2 \leqslant i < j \leqslant m$ đối xứng.*

2.2.2 Bài toán SDC các ma trận đối xứng thực suy biến

Định lý 2.2.3. *Cho $\mathcal{C}_s = \{C_1, \ldots, C_m\} \subset \mathcal{S}^n$, $m \geqslant 3$, là họ các ma trận suy biến, khác không. Nếu $C_1, \ldots, C_{m-1}$ là $\mathbb{R}$-SDC thì tồn tại ma trận không suy biến thực Q và véctơ dương $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-2}, 1) \in \mathbb{R}_{++}^{m-1}$ sao cho*

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1 &= Q^T C_1 Q = \boldsymbol{diag}((C_{11})_p, 0_{n-p}),\ p < n; \\
&\vdots \\
\tilde{C}_{m-1} &= Q^T(\mu_{m-2}(\cdots + C_{m-2}) + C_{m-1})Q = \boldsymbol{diag}((C_{(m-1)1})_p, 0_{n-p});
\end{aligned}$$

và

$$\tilde{C}_m = Q^T C_m Q = \begin{pmatrix} (C_{m1})_p & C_{m2} \\ C_{m2}^T & 0_{n-p} \end{pmatrix}; \tag{2.8}$$

hoặc

$$\tilde{C}_m = Q^T C_m Q = \begin{pmatrix} (C_{m1})_p & 0 & C_{m5} \\ 0 & (C_{m6})_s & 0 \\ C_{m5}^T & 0 & 0_{n-p-s} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

với

- *Các ma trận con* $(C_{i1})_p, i = 1, 2, \dots, m-1$, *là các ma trận chéo cùng cấp. Đặc biệt,* $(C_{(m-1)1})_p$ *không suy biến;*
- *trong* (2.8), $(C_{m1})_p$ *đối xứng;*
- *trong* (2.9), $(C_{m1})_p$ *đối xứng,* $(C_{m6})_s$ *chéo không suy biến;* C_{m5} *hoặc là ma trận cỡ* $p \times (n-p-s)$ *nếu* $s < n-p$ *hoặc là không tồn tại nếu* $s = n-p$.

Hơn nữa, ba phát biểu sau đây là tương đương.

(i) Mọi ma trận trong họ $\mathcal{C}_s$ *là* $\mathbb{R}$*-SDC;*

(ii) Mọi ma trận trong họ $\tilde{\mathcal{C}}_s = \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m\}$ *là* $\mathbb{R}$*-SDC;*

(iii) hoặc các ma trận con $C_{11}, \dots, C_{m1}$ *với* C_{m1} *có dạng* (2.8) *là* $\mathbb{R}$*-SDC và* $C_{m2} = 0$*; hoặc các ma trận con* $C_{11}, \dots, C_{m1}$ *với* C_{m1} *có dạng* (2.9) *là* $\mathbb{R}$*-SDC và hoặc* $C_{m5} = 0$ *hoặc* C_{m5} *không tồn tại.*

Chương 3

Một số ứng dụng của các kết quả SDC

3.1 Tính khoảng nửa xác định dương

3.1.1 Tính $I_{\geq}(C_1, C_2)$ khi C_1, C_2 là $\mathbb{R}$-SDC

Định lý 3.1.1. *Giả sử $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ là $\mathbb{R}$-SDC và C_2 không suy biến. Và $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ là k giá trị riêng của $C_2^{-1}C_1$ với $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$.*

1. *Nếu $C_2 \succ 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = [-\lambda_k, +\infty)$;*

2. *Nếu $C_2 \prec 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = (-\infty, -\lambda_1]$;*

3. *Nếu C_2 không xác định thì*

   (i) Nếu $B_1, \ldots, B_t \succ 0$ và $B_{t+1}, \ldots, B_k \prec 0$ với một vài $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = [-\lambda_t, -\lambda_{t+1}]$;

   (ii) Nếu $B_1, \ldots, B_{t-1} \succ 0$, B_t không xác định và $B_{t+1}, \ldots, B_k \prec 0$, thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \{-\lambda_t\}$;

(iii) Các trường hợp còn lại, nghĩa là hoặc B_i, B_j không xác định với một vài $i \neq j$ hoặc $B_i \prec 0, B_j \succ 0$ với một vài $i < j$ hoặc B_i không xác định và $B_j \succ 0$ với một vài $i < j$, thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \varnothing$.

Định lý 3.1.2. *Giả sử $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ là SDC, C_2 suy biến và C_1 không suy biến. Khi đó*

(i) Luôn tồn tại ma trận không suy biến U sao cho $U^T C_2 U = \boldsymbol{diag}(B_1, 0), U^T C_1 U = \boldsymbol{diag}(A_1, A_3)$, với B_1, A_1 là các ma trận đối xứng cùng cấp, B_1 không suy biến;

(ii) Nếu $A_3 \succ 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = I_{\geq}(A_1, B_1)$. Ngược lại, $I_{\geq}(C_1, C_2) = \varnothing$.

Với bất kì $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$, luôn tồn tại ma trận không suy biến U sao cho:

$$\tilde{C}_2 = U^T C_2 U = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{p\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times r} \end{pmatrix}; \tilde{C}_1 = U^T C_1 U = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & 0_{r\times r} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

hoặc

$$\tilde{C}_1 = U^T C_1 U = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p\times s} & A_2 \\ 0_{s\times p} & A_3 & 0_{s\times(r-s)} \\ A_2^T & 0_{(r-s)\times s} & 0_{(r-s)\times(r-s)} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

với B_1, A_3 là các ma trận chéo không suy biến. $p, r, s \geqslant 0, p + r = n$.

Giả sử C_1, C_2 là SDC, không mất tổng quát, giả sử $\tilde{C}_2, \tilde{C}_1$ đã SDC. Nghĩa là,

$$\tilde{C}_2 = U^T C_2 U = \mathtt{diag}(B_1, 0), \tilde{C}_1 = U^T C_1 U = \mathtt{diag}(A_1, 0) \tag{3.3}$$

hoặc

$$\tilde{C}_2 = U^T C_2 U = \mathtt{diag}(B_1, 0), \tilde{C}_1 = U^T C_1 U = \mathtt{diag}(A_1, A_4), \tag{3.4}$$

với A_1, B_1 là ma trận chéo cùng cấp, B_1 không suy biến.

Định lý 3.1.3. *(i) Nếu $\tilde{C}_2, \tilde{C}_1$ có dạng (3.3) thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = I_{\geq}(A_1, B_1)$;*

(ii) Nếu $\tilde{C}_2, \tilde{C}_1$ có dạng (3.4) thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = I_{\geq}(A_1, B_1)$ nếu $A_4 \geq 0$ và $I_{\geq}(C_1, C_2) = \emptyset$, trong trường hợp còn lại.

3.1.2 Tính $I_{\geq}(C_1, C_2)$ khi C_1, C_2 không $\mathbb{R}$-SDC

Định lý 3.1.4. *Cho $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ như trong Bổ đề 3.1.2 và C_1, C_2 không SDC. Khi đó các mệnh đề sau đúng:*

(i) Nếu $C_1 \succeq 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \{0\}$;

(ii) Nếu $C_1 \not\succeq 0$ và tồn tại một giá trị riêng thực λ_l của $C_2^{-1}C_1$ sao cho $C_1 + (-\lambda_l)C_2 \succeq 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \{-\lambda_l\}$;

(iii) Nếu (i) và (ii) không xảy ra thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \emptyset$.

Định lý 3.1.5. *Cho $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ không SDC. Giả sử C_1 không suy biến và $C_1^{-1}C_2$ có dạng Jordan thực $diag(J_1, \ldots J_r, J_{r+1}, \ldots, J_m)$, với $J_1, \ldots, J_r$ là các khối Jordan tương ứng với các giá trị riêng thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ của $C_1^{-1}C_2$ và $J_{r+1}, \ldots, J_m$ là các khối Jordan tương ứng với các giá trị riêng phức $\lambda_i = a_i \pm \mathbf{i}b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = r+1, r+2, \ldots, m$ của $C_1^{-1}C_2$.*

(i) Nếu $C_1 \succeq 0$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \{0\}$;

(ii) Nếu $C_1 \not\succeq 0$ và có giá trị riêng thực $\lambda_l \neq 0$ của $C_1^{-1}C_2$ sao cho $C_1 + \left(-\frac{1}{\lambda_l}\right) C_2 \succeq 0$ then $I_{\geq}(C_1, C_2) = \left\{-\frac{1}{\lambda_l}\right\}$;

(iii) Nếu (i) và (ii) không xảy ra thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \emptyset$.

Định lý 3.1.6. *Cho $C_1, C_2 \in \mathcal{S}^n$ là hai ma trận không SDC và suy biến sao cho $\tilde{C}_2$ và $\tilde{C}_1$ có dạng (3.1) hoặc (3.2) với $A_2 \neq 0$. Giả sử $I_{\geq}(A_1, B_1) = [a, b], a < b$. Khi đó, nếu $a \notin I_{\geq}(C_1, C_2)$ và $b \notin I_{\geq}(C_1, C_2)$ thì $I_{\geq}(C_1, C_2) = \emptyset$.*

3.2 Giải bài toán quy hoạch toàn phương với các ràng buộc toàn phương

Bài toán quy hoạch toàn phương với m ràng buộc toàn phương (QCQP) có dạng sau

$$(\mathrm{P_m}) \qquad \begin{array}{ll} \min & f_0(x) = x^T C_0 x + a_0^T x \\ \text{s.t.} & f_i(x) = x^T C_i x + a_i^T x + b_i \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}$$

với $C_i \in \mathcal{S}^n$, $x, a_i \in \mathbb{R}^n$ và $b_i \in \mathbb{R}$. Ta chỉ ra rằng nếu $C_0, \ldots, C_m$ là $\mathbb{R}$-SDC, $(\mathrm{P_m})$ được nới lỏng về bài toán nón bậc hai lồi

$$(\mathrm{SP_m}) \qquad \begin{array}{ll} \min & f_0(y, z) = \alpha_0^T z + \xi_0^T y \\ \text{s.t.} & f_i(y, z) = \alpha_i^T z + \xi_i^T y + b_i \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ & y_j^2 \leqslant z_j, j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

$(\mathrm{SP_m})$ có thể giải được bằng Thuật toán điểm trong [21].

3.3 Ứng dụng cho tìm cực đại của tổng tỷ số Rayleigh suy rộng

Chúng ta xét các trường hợp đơn giản nhất của tổng:

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T A_1 x}{x^T B_1 x} + \frac{x^T A_2 x}{x^T B_2 x}, \tag{3.5}$$

với $B_1 \succ 0, B_2 \succ 0$. Bằng phép đổi biến, (3.5) được đưa về

$$\max_{\|y\|=1} y^T D y + \frac{y^T A y}{y^T B y},\ B \succ 0. \tag{3.6}$$

Định lý 3.3.1. ([72]) *Nếu A, B, D là $\mathbb{R}$-SDC bởi ma trận trực giao thì (3.6) suy biến về bài toán cực đại hàm một biến trên một khoảng đóng.*

Kết luận

Trong luận án này, bài toán SDC các ma trận Hermite và các ma trận đối xứng thực đã được giải quyết. Kết quả thu được trong luận án không chỉ trên phương diện lý thuyết mà còn có ý nghĩa trên phương diện tính toán. Một mặt, chúng tôi đưa ra các điều kiện cần và đủ cho một họ các ma trận Hermite hoặc ma trận đối xứng thực là SDC. Đồng thời chúng tôi cũng đã đề xuất một thuật toán với thời gian đa thức để giải bài toán SDC các ma trận Hermite, cùng với một số tính toán minh họa các thuật toán với MATLAB. Các kết quả trong phần này ngay lập tức đúng với các ma trận Hermite thực, được biết đến như một bài toán mở được đặt ra trong Bài toán 12 [30]. Ngoài ra, thuật toán chính trong phần này có thể được áp dụng để giải bài toán SDC cho ma trận vuông tùy ý bằng cách viết các ma trận vuông thành hai phần Hermite và phản Hermite. Mặt khác, chúng tôi phát triển phương pháp của Jiang và Li [37] từ hai ma trận lên nhiều ma trận đối xứng thực.

1. Các kết quả về bài toán SDC các ma trận Hermite

    - Đưa ra thuật toán để giải bài toán SDC các ma trận Hermite giao hoán (xem Thuật toán 3).
    - Giải bài toán SDC các ma trận Hermite bằng phương pháp hạng cực đại (xem Định lý 2.1.4 và Thuật toán 4).
    - Đề xuất phương pháp tựa Schmüdgen tìm hạng cực đại của ma trận chùm Hermite (xem Định lý 2.1.2 và Thuật toán 2).
    - Đưa ra một số điều kiện tương đương liên quan đến sự tồn tại một ma trận xác định dương thỏa mãn một hệ phương trình tuyến tính (xem Định lý 2.1.5).
    - Từ đó, đề xuất một thuật toán giải trọn vẹn bài toán SDC các ma trận Hermite thực hoặc phức (xem Thuật toán 6).

2. Các kết quả về bài toán SDC các ma trận đối xứng thực

    - Đưa ra một điều kiện cần và đủ để một họ các ma trận đối xứng thực là SDC (xem Định lý 2.2.2 cho họ không suy biến và Định lý 2.2.3 cho họ suy biến). Các kết quả này là một sự tổng quát và bổ sung phương pháp của Jiang và Li [37] cho hai ma trận.
    - Đề xuất một phương pháp quy nạp để giải bài toán SDC cho họ các ma trận suy biến. Phương pháp này giúp chuyển việc nghiên cứu tính SDC của họ ma trận suy biến về nghiên cứu tính SDC của họ ma trận không suy biến có cấp nhỏ hơn, được chỉ ra ở Định lý 2.2.3. Ngoài ra, chúng tôi nhận thấy kết quả của Jiang và Li [37] chưa đầy đủ. Vì thế chúng tôi bổ sung vào trong Luận án này, xem Bổ đề 1.2.7 và Định lý 1.2.1.
    - Từ đó, đề xuất các thuật toán tương ứng để giải bài toán SDC cho họ không suy biến và họ suy biến (xem Thuật toán 7 và Thuật toán 8).

3. Chúng tôi áp dụng các kết quả đạt được trên đây của bài toán SDC để giải quyết một số vấn đề sau:

    - Tính khoảng nửa xác định dương của ma trận chùm $C_1 + \mu C_2$ (xem các Định lý 3.1.1; 3.1.2; 3.1.3; 3.1.4; 3.1.5 và 3.1.6).
    - Từ đó, ứng dụng khoảng nửa xác định dương để giải triệt để bài toán GTRS (xem Định lý 3.2.1, 3.2.2)
    - Giải lại các bài toán QCQP thuần nhất, bài toán cực đại của tổng tỷ số Rayleigh suy rộng với điều kiện các ma trận là SDC.

Hướng nghiên cứu

Bài toán SDC đã được giải quyết hoàn toàn trên trường số thực $\mathbb{R}$ và số phức $\mathbb{C}$. Một câu hỏi tự nhiên là liệu kết quả SDC đã đạt được có còn đúng trên trường hữu hạn không? đúng trên vành giao hoán có đơn vị không? Hơn nữa, lớp các ma trận SDC là nhỏ. Điều này đặt ra một câu hỏi là có thể làm nhiễu trên các ma trận sao cho họ không SDC trở thành SDC? Một số hướng nghiên cứu của chúng tôi trong tương lai gần gồm:

1. Nghiên cứu bài toán SDC trên trường hữu hạn, trên vành giao hoán có đơn vị;

2. Bài toán xấp xỉ một họ ma trận với một họ ma trận SDC, gọi tắt là ASDC: Giả sử các ma trận $C_1, C_2, \ldots, C_m$, không SDC, với $\epsilon > 0$, tìm các ma trận E_i, $\|E_i\| < \epsilon$ sao cho $C_1 + E_1, C_2 + E_2, \ldots, C_m + E_m$ là SDC. Một vài kết quả về bài toán ASDC đối với hai ma trận thực và ba ma trận phức có thể tìm trong [50], [61], [58].

3. Khám phá các ứng dụng của bài toán SDC.

Danh mục công trình của tác giả

1. V. B. Nguyen, **T. N. Nguyen,** R.L. Sheu (2020), " Strong duality in minimizing a quadratic form subject to two homogeneous quadratic inequalities over the unit sphere", J. Glob. Optim., 76, pp. 121-135.

2. T. H. Le, **T. N. Nguyen** (2022) , "Simultaneous Diagonalization via Congruence of Hermitian Matrices: Some Equivalent Conditions and a Numerical Solution", SIAM J. Matrix Anal. Appl., 43, Iss. 2, pp. 882-911.

3. V. B. Nguyen, **T. N. Nguyen** (2024), "Positive semidefinite interval of matrix pencil and its applications to the generalized trust region subproblems", Linear Algebra Appl., 680, pp. 371-390.

4. **T. N. Nguyen,** V. B. Nguyen, T. H. Le, R. L. Sheu, "Simultaneous Diagonalization via Congruence of m Real Symmetric Matrices and Its Implications in Quadratic Optimization", Preprint.